

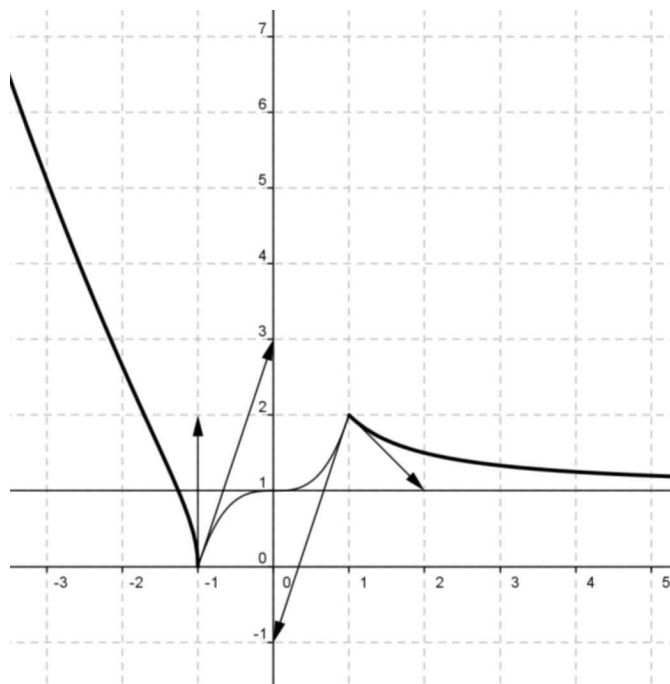
Exercice N°1 : (3 points)

La courbe ci-contre représente une fonction f continue sur \mathbb{R} . La droite $y=1$ désigne à la fois l'asymptote à la courbe de f en $+\infty$ et sa tangente au point d'abscisse 0.

la courbe de f admet une branche parabolique de direction celle de $(y'y)$ au voisinage de $-\infty$.

Par justification graphique déterminer :

- 1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
 $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{f(x)}{x+1}$, $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{f(x)}{x+1}$, $f'(0)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)-2}{x-1}$
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)-2}{x-1}$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f\left(\frac{1}{1-x^2}\right)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{1-f(x)}$



Exercice N°2 : (6 points)

1) Soit ω un nombre complexe non nul

a) Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation (E) : $\omega^2 z^2 - \omega z + 1 = 0$

b) On pose dans toute la suite $\omega = e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$.
Mettre les solutions de (E) sous la forme exponentielle.

2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé (o, \vec{u}, \vec{v}) de sens direct
On note M , M_1 et M_2 les points d'affixes respectives :

$$\omega = e^{i\theta}, z_1 = e^{i(-\theta - \frac{\pi}{3})} \quad \text{et} \quad z_2 = e^{i(-\theta + \frac{\pi}{3})}$$

a) Vérifier que : $\bar{z}_1 = e^{2i\theta} z_2$

b) Déterminer θ dans chacun des cas suivants :

- M_1 et M_2 Sont symétriques par rapport à (o, \vec{u})
- M_1 et M_2 Sont symétriques par rapport à (o, \vec{v})

c) Déterminer l'affixe du point I, milieu du segment $[M_1 M_2]$

d) Déterminer l'ensemble des points I lorsque θ varie dans \mathbb{R}

e) Montrer que les vecteurs \vec{OI} et $\overrightarrow{M_1 M_2}$ sont orthogonaux. En déduire une construction de M_1 et M_2 connaissant M sur le cercle trigonométrique avec $\theta \in \left] \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[$.

Exercice N°3: (5 points)

Soit la suite (u_n) définie par $u_0=3$ et $\forall n \in \mathbb{N}: u_{n+1} = \sqrt{8 + 2u_n}$

- 1) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}: 0 < u_n < 4$
- b) Montrer que la suite (u_n) est croissante
- c) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.
- 2) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}: 0 < 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$
- b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}: 0 < 4 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ Retrouver la limite de (u_n) .
- 3) Pour n un entier naturel non nul, on pose : $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k$
- a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}: 4 - \frac{2}{n} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \leq S_n < 4$
- b) Déterminer la limite de (S_n)

Exercice N°4 : (6 points)

Soit $f_n(x) = x^5 + nx - 2n$ où $x \in \mathbb{R}$.

- 1) a) Montrer que f_n est strictement croissante sur \mathbb{R} et donner $f_n(\mathbb{R})$.
 - b) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n et que $x_n \in [0,2]$
 - c) Calculer x_0 et x_1 et montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*: x_n \geq 1$
 - 2) a) Montrer que $\forall x \in [0,2]$ et $\forall n \in \mathbb{N}: f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$
- En déduire que la suite (x_n) est croissante et qu'elle converge.
- b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}: 2 - \frac{32}{n} \leq x_n \leq 2$. En déduire la limite de (x_n) .

3) Soit la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = -2 - x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{si } x < 0 \\ g(x) = f_1(x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$
- b) Montrer que pour tout $x < 0 : -x^2 - 2 \leq g(x) \leq x^2 - 2$
- c) Montrer que g est continue en 0.